Équation de Hill-Mathieu

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + qy = 0 \tag{E}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire et π-périodique.
On note W l'espace des solutions de cette équation, qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut identifier W à $\mathbb{C}^2$ en associant $(y(0), y'(0))$ à une solution y. On notera alors (y_1, y_2) une base de W définie par :

$$\begin{cases} y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 1 \end{cases}$$

Ensuite, si y est une solution de (E), alors on a :

$$(\tau_{-\pi}y'') + q(\tau_{-\pi}y) = (\tau_{-\pi}y'') + (\tau_{-\pi}qy) = (\tau_{-\pi}y'' + qy) = \tau_{-\pi}(0) = 0$$

Ainsi, $\tau_{-\pi}y \in W$, et $A = \tau_{-\pi}$ est un endomorphisme de W. Si on note également A sa matrice, on a :

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

En effet, comme $W \ni A(y_1)(x) = y_1(x+\pi) = ay_1(x) + by_2(x)$, dériver donne $y_1'(x+\pi) = ay_1'(x) + by_2'(x)$, et évaluer en 0 donne $a = y_1(\pi)$ et $b = y_1'(\pi)$. D'où la première colonne de A, et on fait de même pour la seconde.

Lemme 1.
(i) y_1 *est paire,* y_2 *est impaire*
(ii) $\det A = 1$
(iii) $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$

Démonstration.

(i) Soit $z_1(x) = y_1(-x)$. Alors, par parité de q, on a :

$$z_1''(x) + q(x)z_1(x) = y_1''(-x) + q(x)y_1(-x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0$$

Donc z_1 est solution de (E). D'autre part, on a :

$$z_1(0) = y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad z_1'(0) = -y_1'(0) = 0$$

Alors $z_1 = y_1$, et donc y_1 et paire. On montre de même, avec $z_2(x) = -y_2(-x)$ que y_2 est impaire.

(ii) En notant $w = y_1y_2' - y_1'y_2$, on obtient :

$$w' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = -y_1qy_2 + qy_1y_2 = 0$$

Ainsi w est constante égale à $w(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1$. Donc $\det A = w(\pi) = 1$.

(iii) L'endomorphisme inverse de A est donné par $A^{-1}(y)(x) = y(x-\pi)$, qui a pour matrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Or, par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + I_2 = 0$.
En multipliant par A^{-1}, on obtient $A + A^{-1} = (\operatorname{tr} A)I_2$. Alors :

$$\begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1(\pi) & 0 \\ 0 & 2y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi)+y_2'(\pi) & 0 \\ 0 & y_1(\pi)+y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

On en déduit que $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

□

Théorème 2 (Hill-Mathieu)**.**

(i) Si $|\operatorname{tr}(A)| < 2$, alors toutes les solutions sont bornées.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(A)| = 2$, alors il existe une solution non nulle bornée.

(iii) On a $|\operatorname{tr}(A)| < 2$ si, et seulement si, $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

(iv) Si $|\operatorname{tr}(A)| > 2$, alors aucune solution non triviale n'est bornée.

Démonstration.

On commence par noter :

$$\chi_A(X) = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + 1 \qquad \text{et} \qquad \Delta = \Delta(\chi_A) = (\operatorname{tr} A)^2 - 4$$

(i) Si $|\operatorname{tr}(A)| < 2$, alors $\Delta < 0$, et χ_A admet deux racines complexes conjuguées ρ et $\overline{\rho}$. La matrice A est ainsi diagonalisable, il existe donc une base (u, v) de W telle que :

$$\tau_{-\pi}u = \rho u \qquad \text{et} \qquad \tau_{-\pi}v = \overline{\rho}v$$

Comme $|\rho|^2 = \rho\overline{\rho} = 1$, $|u|$ et $|v|$ sont continues et π-périodiques, donc u et v sont bornées, d'où le résultat.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(A)| = 2$, alors $\Delta = 0$, et χ_A admet une racine double réelle r. Comme $r^2 = 1$, on a $r = \pm 1$. Il existe donc $u \in W$ tel que $\tau_{-\pi}u = ru$, ce qui entraîne encore une fois que u est bornée.

(iii) Comme $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$, on a $|T| = 2$ si, et seulement si, $y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \pm 1$, ce qui équivaut à $y_1(\pi)y_2'(\pi) = 1$, donc à $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 1$ car $\det A = 1$.

(iv) Si $|\operatorname{tr}(A)| > 2$, alors $\Delta > 0$, et χ_A admet deux racines réelles, qui sont inverses l'une de l'autre, car $\det A = 1$. Notons les r et r^{-1}. Quitte à les échanger, on suppose $|r| > 1$. Soient $u, v \in W$ telles que $\tau_{-\pi}u = ru$ et $\tau_{-\pi}v = r^{-1}v$, et soit $y = au + bv$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, une solution non nulle de (E).
Si $a \neq 0$, soit $x \in \mathbb{R}$ n'annulant pas u. Alors $y(x+n\pi) = ar^n u(x) + br^{-n}v(x) \sim_{n\to+\infty} ar^n u(x)$.
Si $a = 0$, alors $b \neq 0$, soit $x \in \mathbb{R}$ n'annulant pas v. Alors $y(x - n\pi) = br^n v(x)$.
Dans les deux cas, y n'est pas bornée.

□

Références

[QZ] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod